Colle du 21 novembre: Séries entières bis

9.1 Première série

Exercice 1: Calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{C_{2n}^n}$.

Exercice 2: Soit $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. Soit $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ continue sur $\overline{D}$, développable en série entière sur D, et nulle sur un arc du cercle unité de longueur $\alpha > 0$. La fonction f est-elle nécessairement nulle?

Exercice 3: Soient $a_1, .., a_m \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux dans leur ensemble., et soit $p(n)$ le nombre de solutions $(x_1, ..., x_m) \in \mathbb{N}^m$ de $a_1x_1 + ... + a_mx_m = n$. Donner un équivalent de $p(n)$.

Exercice 4: Montrer que $\forall n \geq 2, (n + 1/2)\zeta(2n) = \sum_{p=1}^{n-1} \zeta(2p)\zeta(2n - 2p)$.

9.2 Deuxième série

Exercice 1: Soient v et w deux complexes non nuls. À quelle condition sur v et w existe-t-il une série entière de rayon de convergence infini non constante telle que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z+v) = f(z+w) = f(z)$.

Exercice 2: *Théorème de Weierstrass*
1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ de classe C^1 en tant que fonction complexe. Soit $z_0 \in U$ et notons $d = d(z_0, U^c)$. En étudiant la fonction $\lambda \mapsto \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z+\lambda(z_0+re^{iu}-z))-f(z)}{z_0+re^{iu}-z} e^{iu} du$, montrer que f est développable en série entière sur $B(z_0, d)$.
2. En déduire que l'image d'une série entière de rayon infini non constante est dense dans $\mathbb{C}$. Une telle fonction est-elle nécessairement surjective?
3. Que dire de la composée de deux fonctions analytiques?

Exercice 3: Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence 1 telle que $\forall z \in B(0,1), |f(z)|(1 - |z|) \leq 1$. Montrer que $|a_n| \leq (n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e(n+1)$.

9.3 Troisième série

Exercice 1: *Automorphismes du disque*
Une série entière $f : B(0,1) \to B(0,1)$ de rayon 1 est dite automorphisme du disque si elle est bijective et f^{-1} est aussi développable en série entière sur $B(0,1)$.
1. Soit $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ une série entière de rayon 1. On suppose que $z \mapsto |f(z)|$ admet un maximum global. Montrer que f est constante.
2. Soit $f : B(0,1) \to B(0,1)$ une série entière de rayon 1 telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\forall z \in B(0,1), |f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$. Étudier les cas d'égalité.
3. Pour $a \in B(0,1)$, on considère la transformation de Moebius: $\phi_a : z \mapsto \frac{z-a}{1+\overline{a}z}$. Montrer que ϕ_a est un automorphisme du disque.
4. Donner tous les automorphismes du disque. On admettra que la composée de deux séries entières $B(0,1) \to B(0,1)$ est encore une série entière (conséquence immédiate de l'exercice 9.2.2).

Exercice 2: Soit D le disque unité ouvert et f une série entière de rayon de convergence 1. Existe-t-il nécessairement un ouvert U connexe par arcs contenant strictement D tel que f admet un prolongement continu à U?